BIOMEDAL

PASS - Mineure Mathématiques

Exercices d’entraînement – Calcul matriciel et systèmes

Corrigé

Exercice 1 : On donne :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

1. a) Calculer $2A - 3D$.

b) Vérifier par le calcul que $(A + D)C = AC + DC$.

<table>
<tr><th colspan="2">CORRECTION</th></tr>
<tr><td>Explication</td><td>
1. a) On trouve $2A - 3D = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -16 \\ -1 & 16 & 4 \end{pmatrix}$.

b) On a $A + D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $(A + D)C = \begin{pmatrix} 22 & 10 & -8 & -2 \\ 6 & 3 & -7 & -37 \end{pmatrix}$

Ensuite $AC = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 14 & 5 \\ 19 & 9 & -8 & -21 \end{pmatrix}$ et $DC = \begin{pmatrix} 18 & 6 & -22 & -7 \\ -13 & -6 & 1 & -16 \end{pmatrix}$

Finalement, on a bien $(A + D)C = AC + DC$
</td></tr>
</table>

Exercice 2 : Dans le cas suivant, calculer A^n pour tout entier naturel n.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<table>
<tr><th colspan="2">CORRECTION</th></tr>
<tr><td>Explication</td><td>
1. Regardons les premières puissances de A :

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A$, $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8A$

On conjecture que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, A^n = 2^{n-1}A$.
Pour tout entier naturel n non nul, posons $R(n)$: "$A^n = 2^{n-1}A$" (HR)

Initialisation : Pour $n = 1$, $R(1)$: "$A^1 = A$", donc $R(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul, tel que $R(n)$ est vraie. Montrons que $R(n + 1)$ reste vraie pour tout n, c'est-à-dire $A^{n+1} = 2^{n+1-1}A = 2^n A$
$A^{n+1} = A^n A = 2^{n-1}A \times A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1}(2A) = 2^n A$: $R(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : Finalement $A^n = 2^{n-1}A$ pour tout n non nul. $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

</td></tr>
</table>

Exercice 3* : On donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout entier naturel n.

2. La matrice A est-elle inversible ?

CORRECTION	
Explication	**1.** On obtient : $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A$ Pour tout entier naturel n non nul, posons $R(n)$: "$A^{2n} = A^2$ et $A^{2n+1} = A$" **(HR)** • **Initialisation :** Pour $n = 1$, $R(1)$: "$A^{2\times 1} = A^2$ et $A^{2\times 1+1} = A^1$, donc $R(1)$ est vraie. • **Hérédité :** Soit n un entier naturel non nul, tel que $R(n)$ est vraie. Montrons que $R(n+1)$ reste vraie pour tout n, c'est-à-dire $A^{2(n+1)} = A^2$ et $A^{2(n+1)+1} = A$ (ou encore $A^{2n+2} = A^2$ et $A^{2n+3} = A$) $A^{2n+2} = A^{2n+1}A = A \times A = A^2$ **(HR)** $A^{2n+3} = A^{2n+2}A = A^2 \times A = A^3 = A$: $R(n+1)$ est vraie. • **Conclusion :** Finalement $A^{2n} = A^2$ et $A^{2n+1} = A$ pour tout n non nul. **2.** Raisonnement par l'absurde Si A était inversible, en multipliant la relation $A^3 = A$ par A^{-1}, on obtiendrait : $A^2 = I$. Ce qui contredit la question 1. La matrice A n'est donc pas inversible.

Exercice 4 : On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = I + J$ où J est une matrice que l'on précisera.

2. a) Calculer J^2 et J^3.

b) En déduire l'expression de A^n tout entier naturel n.

CORRECTION	
Explication	**1.** Pour déterminer la matrice J telle que $A = I + J$, il suffit de calculer $A - I$ $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$ **2. a)** On obtient $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$ **b)** Par récurrence (vu en TD), on obtient $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x+2y-z=a \\ -2x-3y+3z=b \\ x+y-2z=c \end{cases}$ (a, b et c réels donnés).

CORRECTION	
Explication	$\begin{cases} x+2y-z=a \\ -2x-3y+3z=b \\ x+y-2z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=a & \\ y+z=b+2a & \boldsymbol{L2=L2+2L1} \\ -y-z=c-a & \boldsymbol{L3=L3-L1} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=a & \\ y+z=b+2a & \\ 0=b+c+a & \boldsymbol{L3=L3+L2} \end{cases}$ On en déduit : • Si $a+b+c \neq 0$, le système n'a pas de solution • Sinon, on obtient : $\begin{cases} x=3z-3a-2b \\ y=b+2a-z \end{cases}$ Ce système possède une infinité de solutions : $\{(3z-3a-2b, 2a+b-z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 6* : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} (2-\lambda)x+4y=0 \\ 3x-(4+\lambda)y+12z=0 \\ x-2y+(5-\lambda)z=0 \end{cases}$

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre λ le système (S) est-il de Cramer ?

CORRECTION	
Explication	Utilisons la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système linéaire. $(S) \begin{cases} (2-\lambda)x+4z=0 \\ 3x-(4+\lambda)y+12z=0 \\ x-2y+(5-\lambda)z=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+(5-\lambda)z=0 & \\ 3x-(4+\lambda)y+12z=0 & \boldsymbol{L1 \Leftrightarrow L3} \\ (2-\lambda)x+4z=0 & \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+(5-\lambda)z=0 & \\ (2-\lambda)y+3(\lambda-1)z=0 & \boldsymbol{L2=L2-3L1} \\ 2(2-\lambda)y-(\lambda-1)(\lambda-6)z=0 & \boldsymbol{L3=L3-(2-\lambda)L1} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+(5-\lambda)z=0 & \\ (2-\lambda)y+3(\lambda-1)z=0 & \\ -\lambda(\lambda-1)z=0 & \boldsymbol{L3=L3-2L2} \end{cases}$ Le système est de Cramer si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, c'est-à-dire si et seulement si λ est différent de 0, 1 et 2.

Exercice 7* : Soit n un entier ou égal à 2 et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & ⋰ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires non nuls. On pose $X = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)$ et $B = (y_1 \quad \cdots \quad y_n)$.

1. Ecrire le système $AX = B$ puis le résoudre.

2. En déduire que A est inversible et calculer l'inverse de A.

CORRECTION	
Explication	**1.** $AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 x_n = y_1 \\ \lambda_2 x_{n-1} = y_2 \\ \lambda_3 x_{n-2} = y_3 \\ \ddots \\ \lambda_n x_1 = y_n \end{cases}$, ce qui s'écrit : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i x_{n-i+1} = y_i$ Les coefficients $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ étant tous non nuls, on en déduit que le système précédent possède une unique solution, le n-uplet $\left(\frac{y_n}{\lambda_n}, \frac{y_{n-1}}{\lambda_{n-1}}, \dots, \frac{y_2}{\lambda_2}, \frac{y_1}{\lambda_1}\right)$. **2.** L'équation $AX = B$ admet une unique solution. De plus, le système est de Cramer (les coefficients diagonaux du système triangulaire sont tous non nuls), donc A est inversible, c'est-à-dire que $AX = B$ équivaut à $X = A^{-1}B$ On a $X = A^{-1}B \Leftrightarrow \left(\frac{y_n}{\lambda_n}, \frac{y_{n-1}}{\lambda_{n-1}}, \dots, \frac{y_2}{\lambda_2}, \frac{y_1}{\lambda_1}\right) = A^{-1}(y_1 \quad \cdots \quad y_n)$ Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1/\lambda_n \\ \vdots & ⋰ & 1/\lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 8 : Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **2.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

CORRECTION

Explication

1. Ici, on est dans le cas particulier des matrices 2×2

Rappel : La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Ici, $1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$, A est inversible et on a $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. On utilise la méthode de Gauss Jordan (pivot)
On présente les deux matrices côte à côte B et I. On écrit à droite les opérations élémentaires qui permettent de transformer A en I et on applique simultanément aux deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 = L2 - 3L1 \\ L3 = L3 + 2L1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 = L3 + 4L2 \end{matrix}$$

Cette réduite de Gauss de B a tous ses pivots non nuls ($1, -1$ et -13), donc B **inversible**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L1 = 13L1 + 2L3 \\ L2 = 13L2 - 5L3 \\ L3 \end{matrix}$$

Enfin les opérations élémentaires $L1 = \frac{1}{13}L1, L2 = -\frac{1}{13}L2, L3 = -\frac{1}{13}L3$ donnent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi : } B^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 : Résoudre le système suivant

$$(S_1)\begin{cases} 2x+y+3z=4 \\ -x-y-2z=-3 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$$

CORRECTION	
Explication	**Pour S_1 :** $(S_1)\begin{cases} 2x+y+3z=4 & \boldsymbol{L1} \\ -x-y-2z=-3 & \boldsymbol{L2} \\ x+2y+z=-1 & \boldsymbol{L3} \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x+2y+z=-1 & \boldsymbol{L1=L1\Leftrightarrow L3} \\ -x-y-2z=-3 & \\ 2x+y+3z=4 & \boldsymbol{L3=L3\Leftrightarrow L1} \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x+2y+z=-1 & \\ y-z=-4 & \boldsymbol{L2=L1+L2} \\ -3y+z=6 & \boldsymbol{L3=L3-2L1} \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x+2y+z=-1 & \\ y-z=-4 & \\ -2z=-6 & \boldsymbol{L3=L3+3L2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$ Ainsi, $(-2,-1{,}3)$ est le couple de solutions de S_1

Exercice 10* : Discuter en fonction des paramètres m, et a les solutions du système

$$(S_T)\begin{cases} (2m-3)x+(m-1)y=m+a \\ (5-m)x+(m-1)y=m-2 \end{cases}$$

CORRECTION	
Explication	**Pour S_T :** $(S_T)\begin{cases}(2m-3)x+(m-1)y=m+a & \boldsymbol{L1}\\ (5-m)x+(m-1)y=m-2 & \boldsymbol{L2}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-3)x+(m-1)y=m+a & \\ [5-m-(2m-3)]x=m-2-(m+a) & \boldsymbol{L2=L2-L1}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-3)x+(m-1)y=m+a\\ (8-3m)x=-a-2\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{-(2m-3)\left(\frac{a+2}{3m-8}\right)+m+a}{\boldsymbol{m-1}}\\ x=\frac{-a-2}{8-3m}\quad\left(=\frac{a+2}{\boldsymbol{3m-8}}\right)\end{cases}$ Ici, on a des **fractions**, donc on doit s'assurer que le dénominateur est différent de 0 ❶ Cas où $3m-8=0\Leftrightarrow\boxed{m=\frac{8}{3}}$: *(on remplace dans le système)* $\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2\times\frac{8}{3}-3\right)x+\left(\frac{8}{3}-1\right)y=\frac{8}{3}+a & \boldsymbol{L1}\\ \left(5-\frac{8}{3}\right)x+\left(\frac{8}{3}-1\right)y=\frac{8}{3}-2 & \boldsymbol{L2}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}y=\frac{8}{3}+a & \boldsymbol{L1}\\ \frac{7}{3}x+\frac{5}{3}y=\frac{8}{3}-2 & \boldsymbol{L2}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}y=\frac{8}{3}+a & \\ 0=a+2 & \boldsymbol{L2=L2-L1}\end{cases}$ ① **Si $\boldsymbol{a=-2}$** $\Leftrightarrow\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}y=\frac{8}{3}+(-2)$ $\Leftrightarrow 7x+5y=2$ Les solutions sont le couple (x,y) tel que $7x+5y=2$ ② **Si $\boldsymbol{a\neq 2}$** Le système n'a pas de solution ❷ Cas où $m-1=0\Leftrightarrow\boxed{m=1}$: $\Leftrightarrow\begin{cases}(2\times1-3)x+0=1+a & \boldsymbol{L1}\\ (5-1)x+0=1-2 & \boldsymbol{L2}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}-x=1+a\\ x=\frac{-1}{4}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}=1+a\\ x=-\frac{1}{4}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{4}\\ x=-\frac{1}{4}\end{cases}$ ① **Si $\boldsymbol{a=-\frac{3}{4}}$** Les solutions sont le couple (x,y) tel que $x=-\frac{1}{4}$ et y quelconque ② **Si $\boldsymbol{a\neq-\frac{3}{4}}$** Le système n'a pas de solution